145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

I) **Généralités** [Com] + [LFA] + [Mad]

E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et m non nuls

1) Les principes fondamentaux [Com] + [LFA]

Prop : si E et F sont en bijection, #E=#F [Com 14]

Prop : card(ExF)=card(E)card(F) [Com 13]

Principe de récurrence [LF-A 31]

Th : Formule du crible [Com tome 2 p.6]

Appl : nb de dérangements [Com tome 2 p.10]

2) Combinaisons [LFA] + [Mad]

Th : nombre de parties de cardinal p d'un ensemble E de cardinal n. Notation. [LF-A 33]

Ex : nombre de r-cycles dans Sn

Prop : relation de Pascal [LF-A 34]

Prop : formule du binôme *(par récurrence)* [LF-A 80]

(Prop : nombre de combinaisons avec répétitions [MadAO 11] [???] difficile)

3) A propos des applications [LFA]

Prop : il y a m^n applications de E dans F [LF-A 32]

Corollaire : il y a 2^n parties de E [LF-A 32] *(on considère l'application qui à x dans E associe 1 si x appartient à E et 0 sinon)*

Prop : nombre d'injections. Correspond aussi au nombre d'arrangements. Notation. [LF-A 33]

Cor : nombre de bijections [LF-A 33]

Prop : nombre de surjections [???] difficile

Prop : nombre d'applications strictement croissantes [???] difficile

II) **Fonctions d'Euler et de Möbius** [Gou] + [Per] + [FG]

Une fonction N*-> C est dite multiplicative si pour tous m et n premier entre eux, f(mn)=f(m)f(n)

1) Indicatrice d'Euler [Gou] + [Per]

Déf : indicatrice d'Euler [Gourdon 31]

Prop : il y a Phi(n) générateurs dans Z/nZ [Gourdon 20]

Prop : (Z/nZ)* est isomorphe à Aut(Z/nZ) [FG 7]

Th : th Chinois [Perrin 21]

Csq : Phi est multiplicative [Gourdon 32]

Csq : formule sur Phi(n) en fct des facteurs premiers de n [Gourdon 31]

Prop : formule d'Euler [Gourdon 32]

Th : les sg finis du groupe multiplicatif d'un corps sont cycliques [Perrin 74]

2) Fonction de Möbius [Per] + [FG]

Déf : fonction de Möbius [Perrin 89]

Prop : mu est multiplicative (facile)

Th : formule d'inversion de Möbius [FG 93]

Appl : lien entre les deux fonctions *(appliquer la formule d'inversion à Phi)*

Th : dénombrement des polynômes irréductibles de Fq[X] [FG 189]

Th : proba que deux nombres soient premiers entre eux [FGN oraux tome 1 p.156]

III) Groupes et corps finis [Del] + [BR]

1) Equation aux classes et formule de Burnside [Del] + [BR]

Préliminaires sur les actions de groupes

Equation aux classes [Del 63]

Formule de Burnside [Del 64]

Appl : problème des roulettes [http://les.mathematiques.free.fr/pdf/collier.pdf ou Fresnel - Algèbre et Géométrie, recueil d'exercices, ou Delcourt p.64]

Appl : sg de SO(3) [BR 258]

2) Isomorphismes exceptionnels [Per]

Prop : Liste des cardinaux [Perrin 105]

Prop : un groupe d'indice n de Sn est isomorphe à S_{n-1} [Per 30]

Th : isomoph exceptionnels [Perrin 106]

3) Loi de réciprocité quadratique

Théorème

IV) Les séries génératrices [Com] + [Nou] + [GouAn] + [FGNAlg1]

Déf : soit (a_n) une suite de nombre complexe ; on appelle série génératrice de (a_n) la série formelle de terme général a_n*X^n [Com 55]

En pratique, ici, les a_n sont souvent des entiers positifs ayant une signification combinatoire. L'étude de la série génératrice d'une suite (a_n) va parfois nous donner des renseignements sur les a_n.

Exemple : nombres de Fibonacci [Com 57]

Application : un problème de parenthésage (problème de Catalan) [Comtet tome 1 p.64]

Application : nombre de dérangements dans S_n [FGN oraux 9] (Interprétation en tant que problème de chapeaux : s'il y a n personnes qui laissent leur chapeau à l'entrée d'une pièce, et qui prennent un chapeau au pif en ressortant, la proba que personne ne retrouve son chapeau est $d_n/n!$, et converge vers $1/e$)

Application : k un entier. On peut trouver le nombre P_n de k-uplets $(a_1,\dots,a_k)$ tq $a_1+\dots+a_k=n$ [Nour 177]

Application : nombre de partition d'un entier [Gou]

<u>Développements :</u>
1 - Loi de réciprocité quadratique via les fq [???] (***)
2 - Dénombrement des polynômes irréductibles sur Fq [FG 189] (***)
3 - Dénombrement des partitions d'un entier [Gou An 249] (**)
Sous groupes finis de SO_3, 3 cas [Combes] + [BR] (**)
Isomorphismes exceptionnels [Perr 105] (*)

(un peu trop de corps finis !)

<u>Bibliographie :</u>
[Com1] Comtet – Analyse combinatoire
[Com2]
[Nou] Nourdin
[Gou An]
[Gou Al]
[FG]
[FGN Al1]
[Del]
[Per]
[Mad] Madère
[LFA] Lelong Ferrand Arnaudiès

<u>Rapport jury :</u>
L'utilisation de séries génératrices (programme 2009) est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux et simplifie bien souvent les problèmes de convergence. On peut aussi dénombrer les classes de similitude d'endomorphisme nilpotents dans Mat (n,C) ou le nombre de sous-espace stables d'un endomorphisme cyclique ou les sous-groupes d'un groupe abélien, voire le cardinal de l'ensemble des matrices nilpotentes de rang n−1 dans Mat (n,Fp). La partie élémentaire de cette leçon ne doit pas être oubliée. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités ! Il est essentiel que des méthodes soient dégagées et illustrées : principe de récurrence, principe d'inclusion-exclusion, principe des bergers, le tout est la somme des parties, utilisation de séries entières (génératrices), etc. Chaque méthode doit être illustrée par des exemples. Cette leçon a été choisie un grand nombre de fois, mais a souvent laissé le jury sur sa faim. Notamment le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer le nombre d'applications strictement croissantes de {1, . . . , p} dans {1, . . . , n}, le nombre de surjections entre deux ensembles finis etc.

<u>Ce dont on aurait pu parler :</u>
- Nombres de Stirling s(n,k) : partitionner un ensemble de n éléments en k blocs (Comtet tome 2 p.38)

C'est aussi (à peu de choses près) le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments (k<=n) (séries génératrices, formule du crible)

- Nombres de Bell : nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (toujours Comtet, tome 2, p.45)
- Nombre d'applications strictement croissantes (difficile): http://marino.prepa.free.fr/fichiers20092010/Complements/nombredefonctionsCroissantes.pdf
- Nombre d'applications surjectives (difficile)

- Lemme des bergers (j'en vois pas l'intérêt mais le jury le veut)
- Principe des tiroirs + application Gourdon Analyse p.275
- Pourquoi pas un développement où on calcule de 3 façons le nombre de dérangements (voir [FGN])
- Nombre de combinaisons avec répétition (voir Madère – Leçons d'algère p.11), difficile

Commentaires :

- Attention aux cas où n ou m sont nuls quand on parle des applications.
- La propriété donnant le nombre de sous ensembles de E ayant p éléments nécessite de connaitre le nombre d'injections ; je n'ai donc pas mis les résultats dans l'ordre.
- La première fois que je parle des dérangements, j'utilise les combinaisons, pourtant je n'en ai pas encore parlé.